
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015
CLASA a IX-a

1. Calculați suma: $S = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + \dots + [\sqrt{n \cdot (n+1)}]$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Fie $a, b, c \in (-1, \infty)$, astfel încât $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Să se arate că:
$$\frac{1}{2+a+b} + \frac{1}{2+b+c} + \frac{1}{2+c+a} \leq 1.$$
3. Rezolvați ecuația $x = \frac{\{x\}}{[x]}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Fie (AB) și (CD) două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O și $\{P\} = AB \cap CD$. Să se arate că $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PO}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Țimp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015
CLASA a X-a

1. a) Rezolvați ecuația: $4^{x+\frac{1}{x}} + 9^{x+\frac{1}{x}} = 275$, pentru $x > 0$;
b) Arătați că: $\log_a \frac{2b}{a+b} \geq \frac{1}{2} (\log_a b - 1)$.
2. Arătați că nu există nicio funcție $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, care verifică simultan proprietățile:
a) $f(x+y) + f(x \cdot y^2) = f(x) \cdot f(y^3) + 1, \forall x, y \in \mathbb{Z}$;
b) $f(1) = 2$.
3. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_1 + z_2| = |z_2|$. Calculați valoarea expresiei
$$E = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2015} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2015}.$$
4. Fie $x, y, z \in (1, \infty)$. Să se arate că: $\log_x \frac{y+z}{2} \cdot \log_y \frac{x+z}{2} \cdot \log_z \frac{x+y}{2} \geq 1$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015
CLASA a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $\det(A + iB) = 0$. Arătați că:
 $\det(A + B) + \det(A - B) = 4(\det A + \det B)$.
2. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este un șir definit prin $x_1 = a > 0$ și $x_{n+1} - \ln(n+1) = x_n - \ln n$, $\forall n \geq 1$,
studiați convergența șirurilor $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$, unde $y_n = \frac{x_n}{n}$, $\forall n \geq 1$.
3. Fie $x_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ și $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n - x)^{\sqrt{n}}$.
4. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 = BC$, $B^2 = CA$ și $C^2 = AB$.
a) Arătați că $A^3 = B^3 = C^3$.
b) Dați exemplu de matrice A, B, C diferite două câte două, care satisfac condițiile
din enunț.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015
CLASA a XII-a

1. Folosind eventual egalitatea $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pentru $x > 0$ calculați:

a) $\int_x^{\frac{x}{x^2+x+1}} \arctg t \, dt, x > 0;$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\arctg t}{t^2+t+1} dt.$

2. Determinați mulțimea primitivelor funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^4 + x^{10}}.$

3. Fie $G = (-1, 1)$ și aplicația $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}, \forall x, y \in G$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

a) Arătați că (G, \circ) este grup abelian;

b) Admitem că f este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (G, \circ) , calculați

$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2015 \text{ ori}}, x \in G.$

4. Fie (G, \cdot) un grup. Să se arate că:

a) Dacă $x^2 = e, \forall x \in G$, atunci (G, \cdot) este abelian;

b) Dacă $x^2 \cdot y^2 = y \cdot x, \forall x, y \in G$, atunci (G, \cdot) este abelian;

c) Dacă $(\exists) n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, astfel încât $x^n \cdot y^n = y \cdot x, \forall x, y \in G$, atunci (G, \cdot) este grup abelian.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.